Global J. of Engng. Educ., Vol.6, No.3
Published in Australia

Neue Tools zur Unterstützung der Lehre und des Lernens in Maple® 8

Thomas Schramm
Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg, Fachbereich Geomatik
Hebebrandstr. 1, D-22297 Hamburg, Deutschland

Computeralgebrasysteme eignen sich hervorragend, um komplizierte symbolische Rechnungen durchzuführen. Um sie aber sinnvoll im mathematischen Unterricht einzusetzen, *wissen* sie oft zu viel. So verwirrt es z.B. oft Schüler oder Studierende, die noch keine Kenntnisse von komplexen Zahlen haben, dass bei der Lösung von Gleichungen komplexe Lösungen ausgegeben werden. Ebenso ist es für den Lehrenden oft schwierig mit Algebrasystemen Rechnungen Schritt-für-Schritt durchzuführen, sei es bei der Lösung einer Gleichung, der Differenziation oder bei der Integration. Für das erste Problem ist in Maple das sog. *RealDomain*-Paket eingeführt worden, mit dessen Hilfe komplexe Lösungen oder Funktionswerte konsistent *abgeschaltet* werden können. Schrittweise symbolische Berechnung von Grenzwerten, Ableitungen oder unbestimmten Integralen können mit dem neuen *Calculus1*-Paket durchgeführt werden. Hierbei werden sukzessive Regeln auf Terme angewandt. Sollte einmal keine Regel parat sein, so kann man Tipps abfordern und diese dann anwenden. Im Folgenden zeigen wir an einigen Beispielen, wie diese neuen Werkzeuge eingesetzt werden können.

MANCHMAL IST WENIGER MEHR ...

In Computeralgebrasystemen sind Funktionen oder Gleichungslöser im Allgemeinen für komplexe Argumente und Funktionswerte definiert, so dass Ausdrücke wie $\sqrt{-1} = I, \ln(-1) = \pi I$ wohldefiniert sind und z.B. $\sqrt{x^2}$ nicht zu $|x|$, sondern $\mathrm{csgn}(x)x$ vereinfacht.

In der Schulmathematik kommen komplexe Zahlen gar nicht bis spät vor. Funktionen werden auf dem Köper der reellen Zahlen definiert. So kommt es zu Aussagen, dass z.B. $\sqrt{-1}$ bzw. 1n(-1) *nicht geht* und $\sqrt{x^2}$ zu $|x|$ bzw. x vereinfacht werden kann. Das ist für einen praktischen Einstieg in die Mathematik ganz vernünftig, wenn auch die dabei oft vorkommende Mystifizierung der *imaginären* Zahlen für weitergehende Studien wenig hilfreich ist.

Betrachten wir z.B. drei Kreise mit Maple 8 (Mapleeingaben beginnt mit ein > und sind fett gedruckt, und die Ausgaben des Systems sind in ein anderer Schriftskegel) (Abbildung 1):

> **restart:with(plots):**

> $K_1 := (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

> $K_2 := (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$

> $K_3 := \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2}$

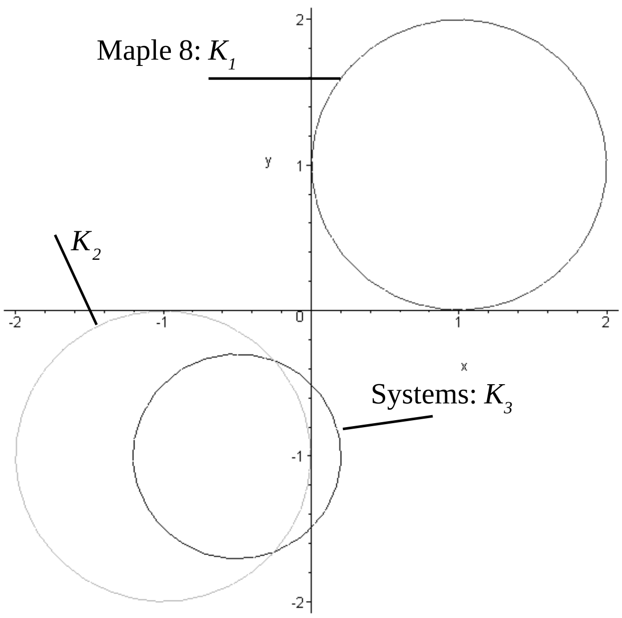

Abbildung 1: Verschieden Kreise.

```
>p[1]:=implicitplot(K[1],x=-2..2,
      y=-2..2,color=red):
 p[2]:=implicitplot(K[2],x=-2..2,
      y=-2..2,color=green):
 p[3]:=implicitplot(K[3],x=-2..2,
      y=-2..2,color=blue):
```

```
>display(p[i]$i=1..3,scaling=constrained);
```

(Abbildung 1) und fragen nach den Schnittpunkten, so erhalten wir in Maple für die beiden disjunkten Kreise K_1 und K_2

```
> solve({K[1],K[2]},{x,y}):
> allvalues(%);
```

$$\{x=\frac{-1}{2} I\sqrt{2}, y=\frac{1}{2} I\sqrt{2}\}, \{x=\frac{1}{2} I\sqrt{2}, y=\frac{-1}{2} I\sqrt{2}\}$$

Also zwei rein imaginäre Lösungen, die natürlich in der reellen Zahlenebene, keine Koordinaten darstellen. Für die beiden sich schneidenden Kreise K_2 und K_3 finden wir natürlich zwei reelle Schnittpunkte:

```
> solve({K[2],K[3]},{x,y}):
> allvalues(%);
```

$$\{x=\frac{-1}{4}, y=-1+\frac{\sqrt{7}}{4}\}, \{x=\frac{-1}{4}, y=-1-\frac{\sqrt{7}}{4}\}$$

Um diese erst mal verwirrende Tatsache zu unterbinden, kann das RealDomain-Paket geladen werden, welches die gebräuchlichsten Funktionen so umdefiniert, dass nur reelle Argumente und Funktionswerte zugelassen sind. Der Aufruf dieses Pakets kann bereits bei der Initialisierung Maples unsichtbar durchgeführt werden.

```
> with(RealDomain);
```

Warning, these protected names have been redefined and unprotected: Im, Re, ^, arccos, arccosh, arccot, arccoth, arccsc, arccsch, arcsec, arcsech, arcsin, arcsinh, arctan, arctanh, cos, cosh, cot, coth, csc, csch, eval, exp, expand, limit, ln, log, sec, sech, signum, simplify, sin, sinh, solve, sqrt, surd, tan, tanh

Mit dem Aufruf des Pakets werden die umdefinierten Funktionen angezeigt, die nur noch *reell verstehen*. Jetzt liefert der erste Lösungsversuch keine Lösung mehr

```
> solve({K[1],K[2]},{x,y});
```

der zweite bleibt natürlich erhalten

```
> solve({K[2],K[3]},{x,y}):
  allvalues(%);
```

$$\{x=\frac{-1}{4}, y=-1+\frac{\sqrt{7}}{4}\}, \{x=\frac{-1}{4}, y=-1-\frac{\sqrt{7}}{4}\}$$

Das RealDomain-Konzept, lässt sich auch nur lokal bei der Auswertung von Termen berücksichtigen. Z.B. *ohne* RealDomains

```
> restart;
```

> $\mathrm{simplify}(\sqrt{x^2}), \sqrt{-1}, \log(-1)$

$\mathrm{csgn}(x)\, x, I, \pi I$

und *mit*

```
> use RealDomain in
  simplify(sqrt(x^2)),sqrt(-1),ln(-1)
 end use;
```

$|x|$, *undefined* , *undefined*

WITH A LITTLE HELP BY...

Gleichungen Bearbeiten

Algebrasysteme lösen viele Gleichungen automatisch. Dies ist zwar für den mathematischen Alltag die gewünschte Methode, doch nicht besonders pädagogisch, denn es sollen ja oft gerade die Lösungsmethoden vorgeführt werden.

Es kommt bei der Präsentation solcher Rechnungen häufig vor, dass Gleichungen in Folge durch Addition, Multiplikation oder Exponentation mit einem Term, oder simultane Anwendung einer Funktion auf beide Seiten der Gleichung, umgeformt werden. Gleichungen stellen in Maple einen Datentyp (=) dar, auf welchen Operatoren wirken können. Die Multiplikation von zwei Gleichungen, oder einer Gleichung mit einer Zahl ist aber z.B. nicht, oder nicht konsistent definiert. Die Anwendung einer Funktion auf eine Gleichung funktionier i.A. ebenfalls nicht..

Abhilfe können hier sog. neutrale (Infix)-Operatoren bieten, die mit einem & beginnen und als Funktion bzw. Prozedur definiert werden.

Wir definieren als Beispiel einen Operator für die Anwendung von Funktionen auf Gleichungen. Die Syntax des neuen Operators ist:

```
Term1=Term2 &f Funktion;
```

Das Ergebnis ist dann:

```
Funktion(Term1)=Funktion(Term2)
```

Die Definition kann in Maple wie folgt vorgenommen werden:

```
> restart:
```

```
> `&f`:=proc(Op1,fun)
     if type(Op1,`=`) then
       fun(lhs(Op1))=fun(rhs(Op1))
     else fun(Op1)
     end if
     end proc:
```

Wir können diesen neuen Operator benutzen, um auf eine Gleichung auf beiden Seiten z.B. die Sinusfunktion, oder eine Wurzel anzuwenden.

Im folgenden Beispiel wird mit % immer auf die letzte Ausgabe zurückgegriffen.

```
> y = arcsin(x^2);
```

$$y = \arcsin(x^2)$$

```
> % &f sin;
```

$$\sin(y) = x^2$$

```
> % &f sqrt;
```

$$\sqrt{\sin(y)} = \sqrt{x^2}$$

```
> simplify(%,symbolic);
```

$$\sqrt{\sin(y)} = x$$

Entsprechende Operatoren können auch für ^,*,+ gebildet werden und ggf. auch bei der Initialisierung geladen werden.

Noch Zwei Tipps

- Manchmal ist es unerwünscht, dass Maple automatisch (mathematisch korrekte) Vereinfachungen vornimmt. So wird z.B. $\frac{a}{a}$ immer zu 1 vereinfacht. Abhilfe schafft hier die Null-Funktion **``()**.

```
> a/a;
```

$$1$$

```
> ``(a)/a;
```

$$\frac{(a)}{a}$$

Die Klammer läßt sich aber leider nicht vermeiden.

- Bei Auswertungen komplexer Ausdrücke kann es vorkommen, dass ein sehr kleiner komplexer Anteil verbleibt, obwohl das Ergebnis symbolisch rein reell wäre. Hier hilft die Funktion **fnormal**.

Schritt-für-Schritt

Ein Hindernis für den Einsatz eines Computeralgebrasystems im Unterricht ist die Vorgabe fertiger Lösungen. Im letzten Beispiel haben wir gesehen, wie wir Gleichungen *mit der Hand* bearbeiten können. Ähnlich können wir in Aufgaben zur Analysis vorgehen. Immerhin stehen für die Grundoperationen Grenzwertbildung, Differenzieren und Integrieren jeweils ein Befehl zur Darstellung der Operation und zur Ausführung zur Verfügung, welche sich jeweils durch Groß- bzw. Kleinschreibung unterscheiden z.B.

```
> restart:
> Int(x*cos(x), x);
```

$$\int x \cos(x)\, dx$$

```
> int(x*cos(x), x);
```

$$\cos(x) + x \sin(x)$$

Für eine schöne Darstellung hilft der folgende Trick:

```
> Int(x*cos(x), x):
  %=value(%);
```

$$\int x \cos(x)\, dx = \cos(x) + x \sin(x)$$

Wenn wir herausbekommen wollen, was dort eigentlich passiert ist, können wir das System etwas gesprächiger machen

```
> restart:infolevel[int]:=3;
```

$$\mathit{infolevel}_{int} := 3$$

```
> int(x*cos(x), x);
int/indef1: first-stage indefinite integration
int/indef2: second-stage indefinite integration
int/trigon: case of integrand containing trigs
```

$$\cos(x) + x \sin(x)$$

allerdings sind diese Informationen gerade für Lernende oft nicht besonders aussagekräftig. Abhilfe schafft das neue Student[Calculus1]-Paket. Dort sind auch viele Routinen zur schnellen Demonstration wichtiger Sätze (Rolle, Mittelwertsatz, etc) der Analysis enthalten., die wir hier aber nicht weiter verfolgen wollen.

Der Start des Pakets zeigt die vorhandenen Funktionen:

```
> restart:with(Student[Calculus1]);
```

[AntiderivativePlot, ApproximateInt, ArcLength, Asymptotes, Clear, CriticalPoints, DerivativePlot, ExtremePoints, FunctionAverage, FunctionChart, GetMessage, GetNumProblems, GetProblem, Hint, InflectionPoints, Integrand, InversePlot, MeanValueTheorem, NewtonQuotient, Newtons Method, PointInterpolation, RiemannSum, RollesTheorem, Roots, Rule, Show, Show Incomplete, ShowSteps, Summand, Surface OfRevolution, Tangent, TaylorApproximation, Understand, Undo, VolumeOfRevolution, WhatProblem]

Wir wollen uns hier die *Schritt-für -Schritt-Berechnung* von Integralen ansehen. Betrachten wir das obige Beispiel:

```
> Int(x*cos(x), x);
```

$$\int x \cos(x)\, dx$$

Falls wir gar nicht wissen, wie solch ein Integral zu lösen ist, lassen wir uns einen Tipp (für die letzte Ausgabe %) geben:

```
> Hint(%);
```

$$[\,parts, x, \sin(x)\,]$$

Aha, wir müssen also wissen, wie die partielle Integration funktioniert mit den Faktoren x, sin(x). Wir wenden diese Regel auf das Integral (vorletzte Ausgabe %%)

```
> Rule[parts,x,sin(x)](%%);
```

$$\int x \cos(x)\, dx = x \sin(x) - \int \sin(x)\, dx$$

Sollten wir immer noch nicht wissen, wie es weiter geht, hilft ein neuer Tipp:

```
> Hint(%);
```

$$[\,\sin\,]$$

den wir auch wieder anwenden können.

```
> Rule[%](%%);
```

$$\int x \cos(x)\, dx = x \sin(x) + \cos(x)$$

Der Rechenweg lässt sich ansehen

```
> ShowSteps();
```

$$\begin{aligned}\int x \cos(x)\, dx &= x \sin(x) - \int \sin(x)\, dx \\ &= x \sin(x) + \cos(x)\end{aligned}$$

Sollten bei der Bearbeitung eines Integrals mehrere Unterprobleme auftreten, können diese auch einzeln verfolgt werden. Alle gängigen Integrationsregeln sind bekannt. Beherrschte Regeln können aus der Vorschlagsliste ausgeblendet und dann automatisch angewendet werden.

MAPLETS

Maplets sind Maple-Applikationen, welche die komplette Maple-Funktionalität in eigenen GUIs (*G*raphical *U*ser *I*nterface) zur Verfügung stellt. Diese Applikationen sind zwar nicht unabhängig von einer Maple-Installation nutzbar, doch kann Maple dabei im Hintergrund bleiben. Server-Client-Applikationen sind möglich, jedoch ist hierzu ein eigenständiges Produkt (MapleNET®) [1] notwendig.

Wir zeigen ein Beispiel, welches auf dem Web-Server von Waterloo Maple verfügbar ist [2]; und welches die oben genannten Step-by-Step-Rechnungen für die Differenziation in ein recht komplexes Maplet verpackt (Abbildung 2). Um dies auszuführen, muss das JAVA JRE 1.2 installiert sein (Linux JRE 1.3).

Es können beliebige Funktionen eingegeben und der Lernende entscheidet per Mausklick, welche Regel anzuwenden ist. Die Regeln lassen sich auch ansehen wie in Abbildung 3.

Das System kann wie bei der Integration Regeln vorschlagen und anwenden.

Malen Interaktiv

Bei der grafischen Auswertung von Funktionsausdrücken tritt häufig das Problem auf, dass die genaue Syntax der Plotbefehle schwierig zu merken ist. Mit dem neuen *interactive*-Befehl wird dies viel einfacher.Z.B erscheint bei der Eingabe des Befehls:

```
> plots[interactive](x^2-y^2);
```

ein Auswahlfenster, welches erst einmal die Art des Plots festlegt (Abbildung 4).

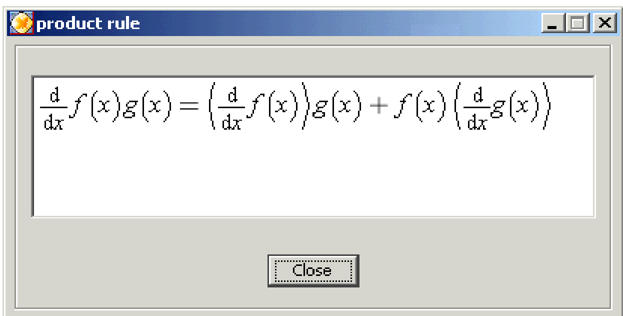

Abbildung 3: Regeln.

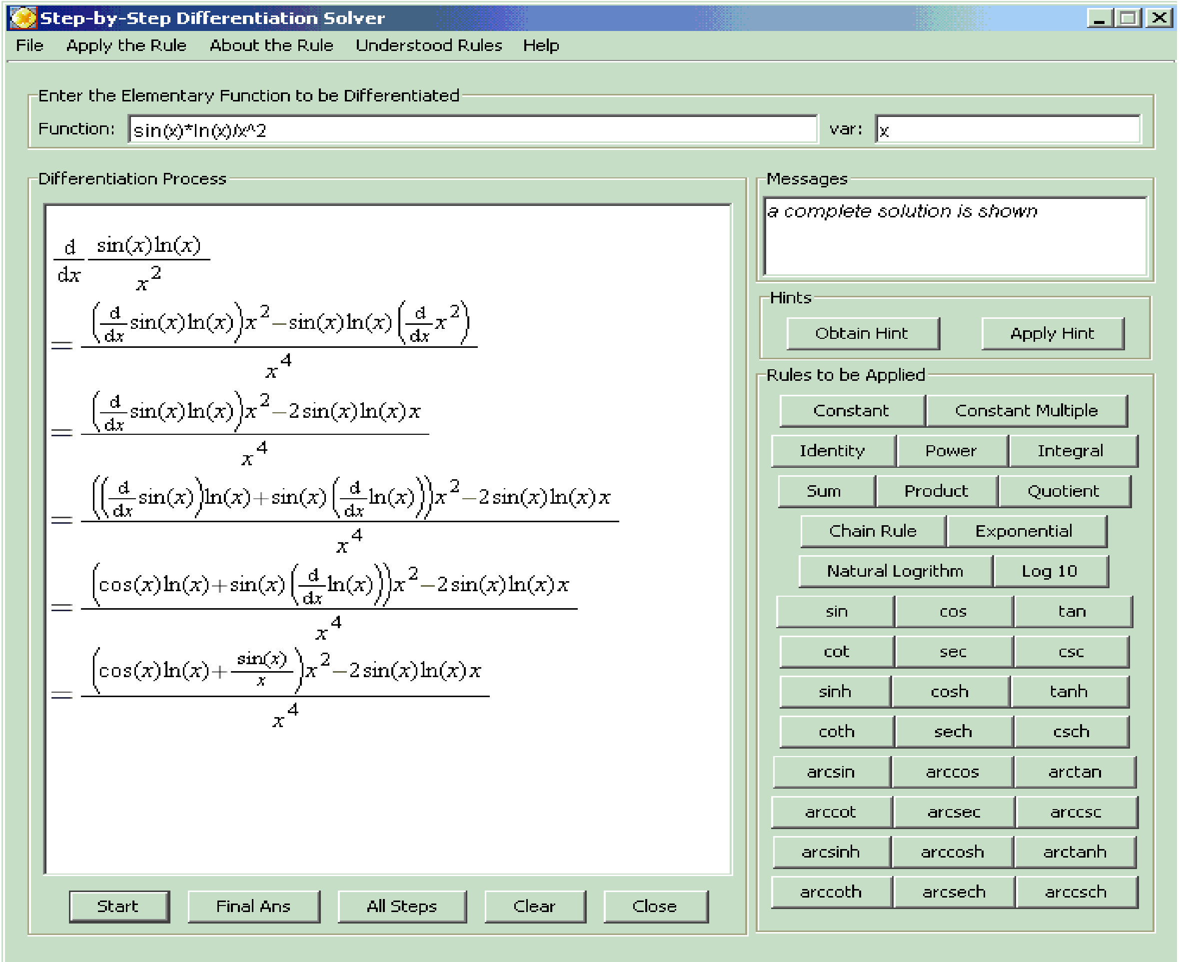

Abbildung 2: Step-by-Step Differentiation Selector Fenster.

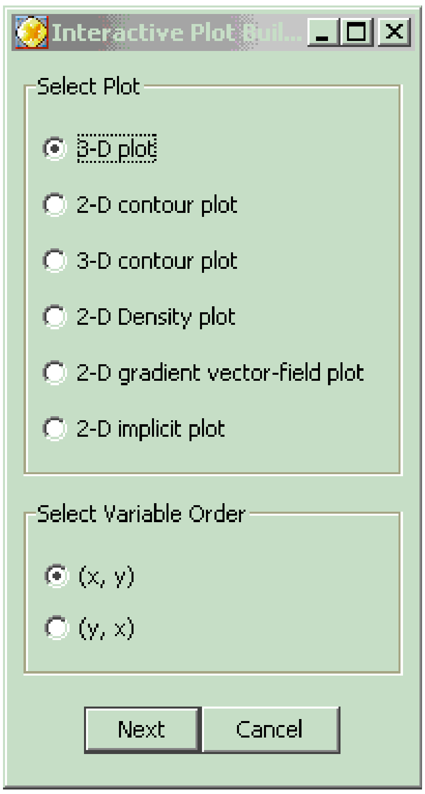

Abbildung 4: Plot Fenster.

Ist diese Frage beantwortet, erscheint ein neues Auswahlfenster, welches für die auszuführende Darstellung Standardwerte vorschlägt. Es können aber alle Einstellungen auch manuell vorgenommen werden, die beim erneuten Aufruf des Befehls erhalten bleiben (Abbildung 5).

Als Ergebnis erhalten wir in diesem Fall eine 3D-Graphik der gewählten Sattelfläche (Abbildung 6). Für eine weitere Inspektion, kann diese mit der Maus gedreht, oder mit dem rechten Mausknopf per kontext-sensitivem Menü weiter verändert werden.

FAZIT

Computeralgebrasysteme sind als Spezialwerkzeuge für Wissenschaftler und Ingenieure geschaffen worden und werden von diesen in zunehmendem Maße eingesetzt. Die Hersteller bemerken aber zusehends, dass Lehrende, Studierende und Schüler solche Systeme zur Demonstration und Aufarbeitung des mathematischen Lehrstoffs nutzen. Waterloo Maple hat diese Herausforderung angenommen und hilft mit neuen Eigenschaften des Copmuteralgebrasystems Maple 8 diesem Umstand Rechnung zu tragen.

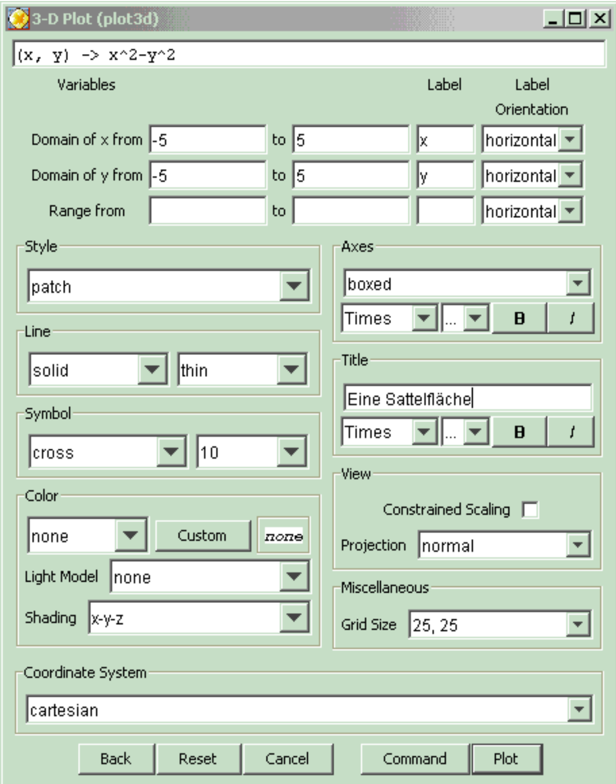

Abbildung 5: Auswahlfenster.

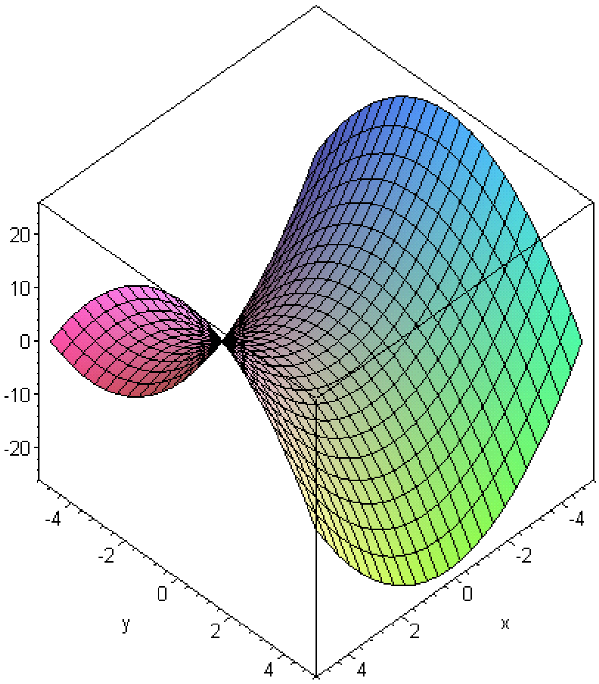

Abbildung 6: Eine Sattelfläche.

An der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg steht allen Mitarbeitern und Studierenden dieses System zur Verfügung. Eine Arbeitsgruppe *Mathematik Impulse für den angewandten Unterricht* (miau) (siehe Bericht von Prof. Maas in diesem Band) erstellt fachbereichsübergreifend Materialien auch unter Nutzung der hier vorgestellten Methoden. Weitere Beispiele zur Nutzung eines Algebrasystems zu Lehr- und Lernzwecken finden sich ebenfalls auf dem Mapleserver [3][4] oder über die Homepage [5] bzw. in den Artikeln des Autors [6][7].

DANKSAGUNG

Die Entstehung dieses Artikels wurde durch die Firma Scientific Computers GmbH in Aachen unterstützt [8].

REFERENZEN & LINKS

1. www.maplesoft.com/maplenet
2. www.maplesoft.com/products/Maple8/index.shtml
   s. dort unter Maple8 Demos, singlestepping.
3. www.mapleapps.com/
4. www.mapleapps.com/powertools/
5. www.haw-hamburg.de/~schramm
6. Schramm, T., Computeralgebra als Integrationswerkzeug im mathematisch naturwissenschaftlichen Unterricht. Das mathematische Pendel – Eine Fallstudie. *Global J. of Engng. Educ*., 5, **3**, 289-298 (2001).
7. Schramm, T., Jedem das Seine - Allen das Richtige! Mathematische Problem-lösungsumgebungen im Einsatz in Forschung und Lehre. *Global J. of Engng. Educ*., 4, **2**, 183-190 (2000).
8. www.scientific.de

BIOGRAPHIE

Thomas Schramm lehrt an der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg als Professor im Fachbereich Geomatik Mathematik, Physik und Datenverarbeitung. Er beschäftigt sich dort mit dem fachübergreifenden Einsatz computergestützter Mathematik zu Forschungs-, Lern- und Lehrzwecken.

Die Förderung des naturwissenschaftlichen Unterrichts an Schulen ist ein anderer Schwerpunkt seiner Tätigkeit. Hierzu führt er Kurse mit Schülern und Fortbildungen mit Lehrern durch.

Thomas Schramm ist Diplomphysiker. Er promovierte 1988 über ein astrophysikalisches Thema der Gravitationslinsentheorie an der Hamburger Sternwarte. Dort forschte er bis 1995 auf Gebieten der theoretischen und beobachtenden Astrophysik. Von

1995 bis 2001 war er als Fachberater für wissenschaftliches Rechnen und multimediale Anwendungen im Rechenzentrum der Technischen Universität Hamburg Harburg (TUHH) tätig. Noch heute steht er der TUHH zu Beratungszwecken zur Verfügung.

Nebenberuflich ist Herr Schramm als Fernfachberater der Studierenden der Fernfachhochschule Hamburg in den Fächern Wirtschaftsmathematik, -Informatik und -Statistik und als freier Autor tätig.

3rd Global Congress on Engineering Education:
Congress Proceedings

edited by Zenon J. Pudlowski

This volume of Congress Proceedings is comprised of papers submitted for the *3rd Global Congress on Engineering Education*, which was held at Glasgow Caledonian University (GCU), Glasgow, Scotland, UK, between 30 June and 5 July 2002. The prime objective of this Congress was to bring together educators, professional organisations and industry leaders from around the world to continue discussions covering important issues, problems and challenges in engineering and technology education for this new millennium.

The papers in these Proceedings present global research and development activities with three opening addresses, 18 keynote addresses, 16 lead papers and almost 70 regular papers that have been contributed by authors from 30 countries across the globe. The papers present readers with a significant source of information on a wide spectrum of issues and topics in engineering and technology education. They detail findings describing current issues and trends, effective methods in the training of engineers and technologists, curriculum design and evaluation and the relevance of liberal education, the management of academic institutions and engineering faculties, social and philosophical aspects of engineering and its impact on modern societies, international case studies, the application of new technologies, academia/industry interaction programmes, sustainable development and international collaborative programmes and systems.

The 3rd Global Congress could be characterised as an academically fruitful event with most papers in these Proceedings being of a very high academic standard. Furthermore, all papers have gone through a strict refereeing process to ensure their relevance for years to come.