Global J. of Engng. Educ., Vol.6, No.3
Published in Australia

Braucht man Determinanten für die Ingenieurausbildung?

Raimond Strauß
Universität Rostock, Fachbereich Mathematik
Universitätsplatz 1, D-18055 Rostock, Deutschland

Die Determinante gehört zu den Standardbegriffen der Mathematikausbildung für Ingenieurstudenten. Im Beitrag wird ihre Verwendung als Bestandteil der Vorlesungen zur Ingenieurmathematik einer Prüfung unterzogen. Dazu werden die Lehrinhalte zu Determinanten und deren Anwendungen diskutiert. Abschließend wird gezeigt, wie mit Hilfe von Determinanten ein einheitlicher Blick auf Kurven- und Oberflächenintegrale gewonnen wird. Beide Begriffe können auf natürliche Weise auf den R^n übertragen werden. Dieser Weg wird bisher in der Lehre nicht genutzt. Er ist angesichts des großen Aufwandes bei der Einführung von Integralen über Kurven und Flächen beachtenswert.

EINLEITUNG

Determinanten werden in allen Ingenieurstudiengängen und in allen Einrichtungen (FH, HS, UNI) im Gebiet lineare Algebra und analytische Geometrie gelehrt. Wie passt das zu den folgenden Überlegungen? Die Determinante ist für Anfänger nicht intuitiv verständlich und scheint zunächst unmotiviert zu sein. Sie existiert nur als Beiwerk zu einer quadratischen Matrix. Sie besitzt keine relevanten Anwendungen, die für einen Ingenieurstudiengang unverzichtbar sind. Für viele der ursprünglichen Anwendungen wie z.B. lineare Gleichungssysteme und die Inversion von Matrizen gibt es bessere Methoden. Trotzdem werden gerade diese Anwendungen in der Ingenieurausbildung behandelt. Viele geometrische Themen, für die die Determinante eine einfache Darstellung gestattet und zusätzliche Einsichten liefert, bleiben zunehmend unberücksichtigt.

Die Determinante wurde zunächst nicht als eigenständiger Begriff angesehen. Bis zu Jacobis grundlegenden Arbeiten ist sie fast nur zur Bearbeitung von Anwendungsproblemen benutzt worden. Mit den Arbeiten von Jacobi und Weierstraß gewann die Determinante innermathematische Bedeutung und wurde Gegenstand mathematischer Betrachtungen. Ihre praktische Nutzung ging zurück.

Zu den genannten Argumenten passt, dass von Sheldon Axler kürzlich ein Lehrbuch erschienen ist, in dem die lineare Algebra ohne Determinanten behandelt wird [1]. Es ist bekannt, dass man in vielen Abschnitten der linearen Algebra ohne Determinanten auskommt. So ist für die Behandlung von linearen Gleichungssystemen die Determinante nicht erforderlich und nur selten wird die Inverse einer Matrix mit Hilfe der Adjunkten berechnet [2].

Axler geht aber wesentlich weiter. Er zeigt ohne Verwendung von Determinanten die Existenz von Eigenwerten linearer Abbildungen auf endlichdimensionalen (komplexen) Vektorräumen. Er verwendet den Begriff des verallgemeinerten Eigenvektors. In der älteren Literatur wird die Menge der verallgemeinerten Eigenvektoren zu einem Eigenwert auch Hauptraum des Eigenwertes genannt. Die Dimension des Hauptraumes zu einem Eigenwert stimmt mit dessen algebraischer Vielfachheit überein.

Man kann Eigenwerte ohne Determinante berechnen, wenn man sich fragt, für welche Werte l die Matrix A-lI nicht injektiv ist. Allerdings ist ihre Berechnung auf diese Weise aufwendiger als die übliche Nullstellenberechnung des charakteristischen Polynoms unter Nutzung der Determinante.

Die Determinante einer linearen Abbildung wird erst im Schlussabschnitt von [1] als Produkt ihrer Eigenwerte definiert. Ihre einzige Anwendung in der Anfängerausbildung ist nach [1] die Transformation von mehrdimensionalen Integralen. Dafür behandelt Axler die Volumenänderung bei linearen Transformationen. Bei Axler stehen die Beweise im

Zu Ehren von Professor Dr-Ing. habil H.W. Stolle anlässlich seines 75. Geburtstages.

Vordergrund. Sie sind einfach gehalten. In der Mathematik wird alles bewiesen, deshalb ist der Text von Axler für Mathematiker sehr interessant. In der Ingenieurmathematik wird gewöhnlich weniger bewiesen und mehr berechnet. Deshalb ist hier die einfache Berechenbarkeit wichtiger. Ein anderer Gesichtspunkt ist die An- und Verwendbarkeit der mathematischen Begriffe, die in der Ingenieurmathematik gelehrt werden. Darüber hinaus können Lehrinhalte, die kaum praktische Anwendungen haben, in der Ingenieurausbildung gerechtfertigt sein. Es ist fragenswert, was warum in der Ingenieurmathematik gelehrt wird. Die Frage soll für die Determinante untersucht werden.

HISTORISCHES ZUR DETERMINANTE

Um die Determinante einzuordnen, ist die Berücksichtigung der historischen Entwicklung nützlich [3]. Es ist bemerkenswert, dass der heute so wichtige Begriff der Matrix historisch nach der Determinante aufgetreten ist.

- Die Determinante ist eine Schöpfung von Leibniz. Sie wurde mit der Bezeichnung Resultante 1678 als kombinatorische Summe definiert und zur Behandlung von linearen Gleichungssystemen genutzt. 1693 gab er lineare Gleichungssysteme mit allgemeinen Koeffizienten an und verwendete die Indexschreibweise. Leibniz kannte die Cramersche Regel. Er wusste, dass Determinanten nach einer Spalte entwickelt werden können. Seine Arbeiten gerieten in Vergessenheit.
- Seki Shinsuke Kowa (Japan 1683) hat fast gleichzeitig kleine Determinanten bis zur Ordnung (5×5) berechnet und sie zur Lösung von linearen Gleichungssystemen angewendet.
- MacLaurin gab 1730 die Cramersche Regel für 2×2, 3×3, 4×4 Gleichungssysteme an.
- 1750 veröffentlichte Cramer eine Methode zur Auflösung eines Systems von n Gleichungen mit n Unbekannten. Die Lösung wurde mit Hilfe von determinantenähnlichen Ausdrücken angegeben.
- Bezout (1764) und Vandermonde (1771) gaben Methoden zur Berechnung von Determinanten an.
- Laplace fand 1772 den Entwicklungssatz der Determinanten.
- Lagrange wendete 1773 (3×3)-Determinanten in der Geometrie an. Insbesondere enthielt seine Arbeit eine Volumeninterpretation (Tetraedervolumen) der Determinante.
- Das Wort Determinante wurde von Gauss 1801 im Zusammenhang mit quadratischen Formen eingeführt. Er verwendete es aber nicht im heutigen Sinn.
- 1812 wurde von Cauchy der Multiplikationssatz für Determinanten angegeben. Er verwendete die Bezeichnung Determinante als erster im heutigen Sinn.
- Durch Jacobi wurden Determinanten ab 1830 zu einem umfassendem Hilfsmittel für Mathematiker. Er verwendete das quadratische Schema und wendete es in der Algebra, der Geometrie und der Analysis an.
- Allgemeine Bedingungen für die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen waren noch nicht bekannt. Es fehlten die Begriffe Matrix und Rang einer Matrix. Die Arbeiten zu Matrizen begannen erst mit Sylvester, der 1850 den Begriff prägte. Der wichtigste Beitrag zur Entwicklung der Matrizen stammt von Frobenius (1878).
- Kronecker (1850) und Weierstraß (1860) betrachteten den Begriff der Determinante im Kontext mit linearen Transformationen. Kronecker (1870) definierte den Determinantenrang.
- Kennzeichnung der Determinante nach Weierstraß (1864):
  Ein Polynom P in den Elementen a_{ik} der (n, n)-Matrix A habe die folgenden Eigenschaften:

  - (Linearität) P ist linear und homogen in den Elementen jeder Zeile.
  - (Alternierend) P wechselt sein Vorzeichen, wenn man zwei Zeilen vertauscht.
  - (Normierung) P = 1 für aik = δik. Dann ist P = Det(A).

- Kennzeichnung der Determinante nach Stephanos (1913).
- Es sei F(aik) = F(A) eine differenzierbare Funktion in den n2 Elementen aik der (n, n)-Matrix A mit der Eigenschaft

  $$F(A \cdot B) = F(A) \cdot F(B)$$

  Dann ist mit einer Konstanten c.

  $$F(A) = (\det(A))^c$$

  Wenn F zusätzlich ein Polynom von niedrigst möglichem Grad≠0 ist, so gilt $F = \det(A)$.

Aus heutiger Sicht ist die Determinante ohne Matrix scheinbar undenkbar. Sie wird in der Ingenieurmathematik als Determinante einer Matrix eingeführt. Historisch wurde die Matrix als mathematischer Begriff erst behandelt, nachdem der Begriff der Determinante geklärt war, wie die folgende Aufzählung zeigt.

- Cauchy (1826) führt im Zusammenhang mit quadratischen Formen in n Variablen das Wort Tableau für die Matrix der entsprechenden Koeffizienten ein. Er untersuchte ähnliche Matrizen unter anderer Bezeichnung und zeigte, dass ähnliche Matrizen der gleichen charakteristischen Gleichung genügen. Er zeigt im gleichen Kontext die Diagonalisierbarkeit von reellen symmetrischen Matrizen.
- Sturm betrachtete die Verallgemeinerung des Eigenwertproblems im Zusammenhang mit der Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen.
- Sylvester definierte 1850 Matrizen und gab Lösbarkeitsbedingungen für lineare Gleichungssysteme an.
- Caley schuf 1858 den Matrizenkalkül. Er gab die Inverse einer Matrix an und erkannte, dass die Matrix eine lineare Transformation darstellt. Er zeigte, dass (2×2) Matrizen ihrer eigenen charakteristischen Gleichung genügen (Satz von Caley-Hamilton).
- Jordan gab 1870 die Jordansche Form für lineare Transformationen über einem Körper von Primzahlordnung an.
- Durch Frobenius wurden ab 1878 Matrizen als weitreichendes mathematisches Hilfsmittel mit zahlreichen Anwendungen weiterentwickelt. Er bewies, dass Matrizen von Jordanscher Normalform Repräsentanten von Klassen ähnlicher Matrizen sind. Der Satz von Caley-Hamilton wurde von ihm bewiesen und Caley zugeeignet. Frobenius führte den Rang einer Matrix ein.
- Im 20. Jahrhundert wurden die Matrizen zum entscheidenden Hilfsmittel der Quantenmechanik (Born, Heisenberg).

Die Liste der Entwicklungen und Anwendungen zu Matrizen lässt sich fortsetzen. Die Einbeziehung von Namen und Daten ist für jede Lehrveranstaltung empfehlenswert.

AUFTRETEN VON DETERMINANTEN IN DER INGENIEURAUSBILDUNG

Determinanten werden in allen Ingenieurstudiengängen und in allen Einrichtungen (FH, HS, UNI) im Gebiet lineare Algebra und analytische Geometrie gelehrt. Sie folgen oft nach der Einführung der Matrizen und nach den linearen Gleichungssystemen und gehen den Eigenwertaufgaben voraus. Selten stehen sie am Anfang oder am Ende der linearen Algebra.

Inhalte des Determinantenabschnitts sind:

- Definition:
  - Die Definition nach Leibniz ist üblich.
  - Es gibt die Einführung der Determinanten mit Hilfe des Entwicklungssatzes.
  - Die Definition nach Weierstraß als Multilinearform wird meist nicht erwähnt.
  - Der Zusammenhang zwischen Determinante und Volumen wird nicht immer gebracht. Meist werden nur Tetraeder und Spat behandelt.
- Eigenschaften;
- Entwicklung einer Determinante;
- Multiplikationssatz.

Jetzt werden Hauptanwendungen der Determinante besprochen, von denen die meisten trotz großer Unterschiede zwischen den Studiengängen in vielen Mathematikvorlesungen für Ingenieure vorkommen.

Die Hauptanwendungen der Determinante können Argumente liefern, die den Sinn der Determinante in der Ausbildung unterstreichen. Es sind in der linearen Algebra:

- Rang einer Matrix, lineare Unabhängigkeit von Vektoren.
- Lineare Gleichungssysteme.
- Eigenwertprobleme für Matrizen.

Die Berechnung der Inversen, die Ermittlung des Ranges einer Matrix und damit die Untersuchung der linearen Unabhängigkeit von Vektoren mit Hilfe von Determinanten ist für praktische Zwecke ungeeignet. Das gilt ebenso für die Cramersche Regel zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Lineare Gleichungssysteme sind für Anfänger am besten mit dem Gauss-Algorithmus zu lösen. Wichtiger als die Cramersche Regel sind numerische Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen, welche aber seltener zum Lehrangebot für Ingenieure gehören. Für die Sätze, die die Struktur der Lösung von linearen Gleichungssystemen behandeln, ist die Determinante nicht erforderlich. Die Begriffe Rang, Defekt und Injektivität sind besser geeignet. Die Theorie der Eigenwertprobleme lässt sich nach dem Vorbild von Axler ohne Determinanten behandeln.

Für die Ingenieursausbildung ist das nicht von Vorteil, denn die Berechnung von Eigenwerten ist mit

Hilfe des charakteristischen Polynoms am einfachsten. Dafür werden Determinanten gebraucht.

Weitere Hauptanwendungen der Determinante findet man in der Geometrie. Leider sind diese Anwendungen tendenziell rückläufig. Einige sind:

- Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte.
- Fläche eines Parallelogramms oder Dreiecks.
- Drei Punkte liegen auf einer Geraden.
- Tetraeder- und Spatvolumen.
- Vier Punkte liegen in einer Ebene.
- Ebenengleichung durch drei Punkte.
- Abstand windschiefer Geraden.
- Darstellung von Kreuz-, Spatprodukt.

Wenn man sich in der Lehrveranstaltung darauf beschränkt Determinanten zu berechnen, sind viele der Anwendungen nur abkürzende Schreibweisen für den Sachverhalt, die einfach umzuschreiben sind. Anderenfalls bietet die Verwendung der Determinante oft zusätzliche Einblicke in Zusammenhänge. Einige der geometrischen Anwendungen, die weniger gelehrt werden, sollen genannt werden:

- Drei Geraden der Ebene gehen durch denselben Punkt oder sind parallel.
- Fläche eines *n*-Ecks.
- Beziehung zwischen den Entfernungen a_{jk} von vier Punkten der Ebene.
- Gleichung eines Kreises durch drei Punkte.
- Kegelschnitt durch fünf Punkte.

In der Analysis findet man weitere Hauptanwendungen. Für diese ist die Determinante unverzichtbar.

- Lineare Unabhängigkeit von Funktionen.
- Lineare Differentialgleichungssysteme.
- Transformationen von mehrdimensionalen Integralen.

Im Zusammenhang von Fundamentalsystemen für lineare Differentialgleichungen wird die lineare Unabhängigkeit von Funktionen mit Hilfe der Wronsky-Determinante untersucht. Für die Lösung eines homogenen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung werden Eigenwerte und Eigenvektoren berechnet. Die Funktionaldeterminante ist Bestandteil der Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale. Oft werden nur sehr einfache Fälle behandelt und man könnte die entsprechende Funktionaldeterminante einfach angeben. Wenn die Volumenänderung bei linearen Transformationen nicht behandelt wurde, kann man die Transformationsformel zwar mit Determinante angeben, sie bleibt aber unverständlich. Im nächsten Abschnitt wird die Transformationsformel auf den Fall von Gebieten verschiedener Dimension verallgemeinert.

KOORDINATENTRANSFORMATION

Das zwei- und dreidimensionale Bereichsintegral sowie Weg- und Oberflächenintegrale sind Bestandteil vieler Vorlesungen zur Ingenieurmathematik. Der Aufwand, sie mit Hilfe von Riemannschen Summen geeignet einzuführen, ist beträchtlich. Hier wird ein Weg vorgeschlagen, diese Integrale in gewisser Hinsicht einheitlich zu behandeln. Damit soll der Aufwand verringert und Zeit gespart werden. Durch die Verallgemeinerung der ohnehin zu behandelnden Koordinatentransformation für mehrdimensionale Integrale auf den Fall von Gebieten verschiedener Dimension kann man die Transformationsformel für die Behandlung von Kurven- und Oberflächenintegralen im R^2 und R^3 als Spezialfälle nutzen. Das Vorgehen erlaubt die einfache Übertragung von Oberflächen- und Kurvenintegralen im R^3 auf Integrale über Mannigfaltigkeiten im R^n.

Es sei $G \subset R^n$ ein beschränktes, abgeschlossenes einfach zusammenhängendes Gebiet des R^n, das eine Randkurve mit stetiger Tangente besitzt. Für $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2,...,x_n)^T \in G$ sei die Dichtefunktion $f(\boldsymbol{x})$ stetig. Dann existiert das Gebietsintegral

$$\int_G f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Der Bereich $G' \subset R^n$ lasse sich durch $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u})$, also

$$\begin{gathered} x_1=\Phi_1(u_1, u_2,\ldots, u_n) \\ x_2=\Phi_2(u_1, u_2,\ldots, u_n) \\ \vdots \\ x_n=\Phi_n(u_1, u_2,\ldots, u_n) \end{gathered}$$

bijektiv auf den Bereich $G \subset R^n$ abbilden, wobei vorausgesetzt wird, dass die Funktionen Φ_i in G' stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen und die Funktionaldeterminante:

$$\det J_\Phi(\mathbf{u}) = \det\left(\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\right)_{i,\, j=1}^{n}\right)$$

für kein $\mathbf{u}$ aus dem Bereich G' verschwindet.

In diesem Fall gilt die Formel:

$$\int_G f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{G'} (f \circ \mathbf{\Phi})(\mathbf{u}) \left|\det(\mathrm{J}_\Phi(\mathbf{u}))\right| d\mathbf{u} \qquad (1)$$

mit $G = \Phi(G')$ Sie wird relativ häufig in den Spezialfällen n=2, 3 für Polar-, Kugel- und Zylinderkoordinaten in den Vorlesungen zur Ingenieurmathematik besprochen. Die Formel (1) lässt sich äquivalent in der Form

$$\int_G f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{G'} (f \circ \mathbf{\Phi})(\mathbf{u}) \sqrt{\det(\mathrm{J}_\Phi^{\mathrm{T}}(\mathbf{u})\,\mathrm{J}_\Phi(\mathbf{u}))}\, d\mathbf{u} \quad (2)$$

schreiben.

Wenn G ein Gebiet des R^n und $G' \subset \mathrm{R}^m$ mit $n > m$ ist, so ist die Jacobimatrix nicht mehr quadratisch, sondern es ist

$$\mathrm{J}_\Phi(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\right)_{i,\,j=1}^{n,\,m}$$

vom Typ $n \times m$. Es wird vorausgesetzt, dass der Rang von J_F in jedem Punkt von G' gleich m ist. Wenn $\mathbf{u}$ das Gebiet $G' \subset \mathrm{R}^m$ durchläuft, so überstreicht der Punkt $\boldsymbol{x}$ das (m-dimensionale) Gebiet $G' \subset \mathrm{R}^n$. In diesem Fall bleibt die letzte Transformationsformel gültig. Bezeichnet

$$D_i, \ \mathrm{i} = 1, \ldots, \binom{n}{m}$$

die sämtlichen m-reihigen Unterdeterminanten von J_Φ und wendet man auf die Determinante $\det(\mathrm{J}_\Phi^{\mathrm{T}}\,\mathrm{J}_\Phi)$ die Formel von Cauchy-Binet

$$\det(\mathrm{J}_\Phi^{\mathrm{T}}(\mathbf{u})\,\mathrm{J}_\Phi(\mathbf{u})) = D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_{\binom{n}{m}}^2$$

an, geht die Transformationsformel über in die Gleichung

$$\int_G f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{G'} (f \circ \mathbf{\Phi})(\mathbf{u}) \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \ldots D_{\binom{n}{m}}^2}\, d\mathbf{u}. \quad (3)$$

Im Vergleich mit (2) wird durch ihre rechte Seite in vielen Fällen die Rechnung vereinfacht. In dieser Form findet man die Transformationsformel zur Integration über ein m-dimensionales Gebiet in R^n schon bei Courant [4] (1930 im Anhang zu Kapitel [5]). Im Weiteren werden Spezialfälle betrachtet. Für n=3 und m=2 erhält man Oberflächenintegrale erster Art. Wenn m=1 und n=2 bzw. n=3 ist, kann man so Kurvenintegrale im R^2 bzw. R^3 einführen. Es folgen einige Beispiele:

- Es sei n=2 und m=1. Wenn x = x(t), y = y(t) und $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$ für $t \in$ [a, b] gilt, so ist G eine Kurve in der Ebene. Die Jacobimatrix, gegeben durch:

$$J_\Phi = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}\right) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix},$$

ist für jedes $t \in$ [a,b] vom Rang eins. Man findet die Formel für das Kurvenintegral erster Art im R^2

$$\int_G f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

Falls $x(t) = t$, ist

$$\int_G f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{1 + \dot{y}^2}\, dt.$$

Die bekannten Formeln für die Bogenlänge erhält man, wenn man in beiden Integralen $f(t) \equiv 1$ setzt.

- Analog findet man für n=3 und m=1 die Formel für Kurvenintegrale im R^3

$$\int_G f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt.$$

Das Integral über eine Kurve im R^n kann man erwartungsgemäß als

$$\int_G f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_a^b f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \sqrt{\dot{x}_1^{\,2} + \ldots + \dot{x}_n^{\,2}}\, dt$$

angeben.

- Sei G eine Teilmenge einer Oberfläche (2-d Mannigfaltigkeit) im R^3 gegeben durch x=x(s,t), y=y(s,t), z=z(s,t) mit (s,t) aus G'. Das Gebiet G' sei eine Teilmenge der (s,t)-Ebene, also ist n=3 und m=2. Dann ist G=Φ(G') oder

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in G'.$$

Die Jacobimatrix ist

$$J_\Phi(s,t) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t)} = \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \\ z_s & z_t \end{pmatrix}$$

Es ist

$$\sqrt{\det(J_\Phi^T(s,t)J_\Phi(s,t))} =$$

$$\sqrt{(x_s^2+y_s^2+z_s^2)(x_t^2+y_t^2+z_t^2)-(x_s x_t+y_s y_t+z_s z_t)^2}.$$

Mit den Bezeichnungen

$$\mathsf{E}=x_s^2+y_s^2+z_s^2, \mathsf{G}=x_t^2+y_t^2+z_t^2 \text{ und } \mathsf{F}=x_s x_t+y_s y_t+z_s z_t$$

nimmt die Transformationsformel die bekannte Gestalt an:

$$\int_G f(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\int_{G'} f(x(s,t),y(s,t),z(s,t))\sqrt{\mathsf{EG}-\mathsf{F}^2}\,dsdt$$

Wenn speziell $x = s$, $y = t$, $z = z(s, t)$ ist, so ist die Jacobimatrix gleich

$$J_\Phi(s,t)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ z_s & z_t\end{pmatrix}$$

Das Gebiet G′ ist die Projektion von $G \subset R^3$ in die s,t – Ebene. Das Oberflächenintegral ergibt sich als:

$$\int_G f(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\int_{G'} f(x,y,z(s,t))\sqrt{1+z_s^2+z_t^2}\,dsdt.$$

SCHLUSSFOLGERUNGEN

Allgemeine Schlussfolgerungen lassen sich nur schlecht formulieren. Dazu sind die Studieninhalte und die Ausrichtung der Ausbildung zu unterschiedlich.

Für Informatiker und Studiengänge, die einen starken Anteil Informatik haben (z.B. Wirtschafts-informatik) muss die Determinante behandelt werden. Bei den dortigen algebraischen und diskreten Inhalten in der Mathematikausbildung und im Hinblick auf Anwendungen zum Beispiel in kombinatorischen und graphentheoretischen Problemen ist sie unverzichtbar.

Bei den Studienrichtungen, die der traditionellen Ingenieurwissenschaft zuzurechnen sind, ist die Frage etwas differenzierter. Es gibt Studiengänge, in denen die Determinante im üblichen Rahmen gelehrt wird, aber die Hauptanwendungen nicht behandelt werden. Nur in diesem Fall könnte man ausbildungsbezogen auf die Determinante verzichten. Dagegen spricht, dass es in der Praxis zahlreiche Themen gibt, in denen der ausgebildete Ingenieur auf Determinanten treffen kann [6].

Wenn Eigenwerte oder mehrdimensionale Integrale oder lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung oder lineare Differentialgleichungssysteme im Lehrprogramm sind, muss die Determinante behandelt werden. Wenn man geometrische Themen bespricht, ist die Determinante sehr nützlich. Es ist wünschenswert, den Zusammenhang zwischen Determinante und Volumen zu behandeln. Er besteht darin, dass der Betrag der Determinante $|D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, ..., \underline{a}_n)|$ die einzige Funktion ist, die das Volumen $V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, ..., \underline{a}_n)$ eines n-dimensionalen Parallelotops definiert [7]. Für das Verständnis der Transformation von mehrdimensionalen Integralen ist es empfehlenswert, die Volumenänderung bei linearen Abbildungen zu berücksichtigen. Insgesamt ist es nicht empfehlenswert, die Determinante aus den Lehrprogrammen für Ingenieurmathematik zu streichen.

REFERENZEN

1. Axler, S., *Linear Algebra Done Right.* New York: Springer-Verlag (2001).
2. Drews, K.D., *Lineare Gleichungssysteme und Lineare Optimierungsaufgaben.* Berlin (1975).
3. Wußing, H., V*orlesungen zur Geschichte der Mathematik.* Berlin (1948).
4. Blaschke, W., *Analytische Geometrie.* Wolfenbüttel (1947).
5. Courant, R., *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung zweiter Band.* Berlin (1930).
6. Schmeidler, W., *Vortäge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik.* Berlin (1949).
7. Sperner, E., *Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra, 1. Teil.* Göttingen (1948).

BIOGRAPHIE

Raimond Strauß wurde 1953 in Eldena (Mecklenburg) geboren. Im Jahre 1979 schloss er ein Mathematik-studium an der Universität Rostock als Diplom-mathematiker ab. Er promovierte 1984 auf dem Gebiet der numerischen Analysis und arbeitete anschließend als Forschungsingenieur in der Anwendungsforschung. Jetzt ist er wissenschaftlicher Mitarbeiter am

Fachbereich Mathematik der Universität Rostock. Er leitet die Arbeitsgruppe Rechentechnik, zu der fünf technische Mitarbeiter gehören.

Seine Interessen in der Lehre sind Inhalte, Methoden und die Einbeziehung von neuen Medien in die Mathematikvorlesungen für Ingenieure. Im Jahre 2002 gehörte er zu den Gründern des Rostocker Arbeitskreises für Ingenieurmathematik, der mit dem Gottlob-Frege-Zentrum an der Hochschule Wismar kooperiert. Er hat Arbeiten zur numerischen Quadratur von singulären Integralen veröffentlicht und ist Mitautor eines Schulbuches zum Thema Computergraphik.

This form is also available on the Web at
http://www.eng.monash.edu.au/uicee/member/MembershipForm.html

UNESCO INTERNATIONAL CENTRE FOR ENGINEERING EDUCATION
UICEE
MEMBERSHIP FORM - 2003

Yes, I/we would like to become a member of the UICEE. Please register me/us as:

i.	Partner (industrial or academic) ($A10,000 p.a.)	
ii.	Sponsor (A$5,000 p.a.)	
iii.	Supporter (A$2,000 p.a.)	
iv.	Contributing Member (A$500 p.a.)	
v.	Individual Member (A$100 p.a.)	
vi	Library Subscription (multiple readers) (A$200 p.a.)	

(i-iv) Institution /Company Name: ....

(i-v) Individual/Contact Surname: ....

First Name: .... Title: .... Position: ....

University/Company Address: ....

....

Country: .... Postcode: ....

Phone (B): .... (H): ....

Fax: .... E-mail: ....

Method of Payment:

| | Cheque | for $.................. made payable to: **Monash University - UICEE**

| | Visa | | Mastercard | | Bankcard |

Card Number: __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __

Cardholder s Name: ....

Expiry Date: __ __ / __ __ Signature: ....

	Electronic Funds Transfers (EFT)
BSB	033 289
Bank Account Number	630 759
Name of Bank	WESTPAC - Monash University
Address of Bank	Melbourne, VIC 3800, Australia
Please fax us a copy of the EFT for our record.	

Please copy this form and return to:
UICEE, Building 70, Monash University, Wellington Rd, Melbourne, VIC 3800, Australia
Tel: +61 3 990-54977, Fax: +61 3 990-51547, E-mail: ZJP@eng.monash.edu.au

Visit the UICEE Web-site at: http://www.eng.monash.edu.au/uicee/